



TITLE:

両側指数ジャンプ拡散過程の下での 資金管理政策について (ファイナ ンスの数理解析とその応用)

AUTHOR(S):

佐藤, 公俊; 鈴木, 淳生

CITATION:

佐藤, 公俊 ...[et al]. 両側指数ジャンプ拡散過程の下での資金管理政策について (ファイナンスの数理解析とその応用). 数理解析研究所講究録 2014, 1886: 34-42

ISSUE DATE:

2014-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/195723>

RIGHT:

両側指数ジャンプ拡散過程の下での資金管理政策について

早稲田大学大学院ファイナンス研究科

佐藤 公俊

名城大学都市情報学部

鈴木 淳生

1 はじめに

将来の資金繰りの悪化や金融市場の混乱への備えとして手元資金を積み増す企業が増加している。企業や事業を持続的に発展させるためには、資金を適切に管理することで資金効率を高め、運用や再投資に向けることが必要である。資金管理問題は資金在庫費用と取引費用の総和の最小化を目的とする問題であり、在庫管理モデルの応用として古くから研究されている (Miller and Orr 1966)。

資金需要過程がドリフト付きブラウン運動にしたがう場合には4つの閾値 (d, D, U, u) による管理方針が最適であることが知られている (Constantinides and Richard 1978, Baccarin 2002, 2009, Guo and Wu 2009)。この方針は資金量が d 以下のとき、 D まで資金量を積み増し、 u 以上のときは U まで資金量を減らすことで、総費用の最小化をおこなう。

近年の研究では、災害等による突発的な資金需要を考慮するために、資金需要過程にジャンプ拡散過程を用いたモデルが注目されている。Bar-Ilan et al. (2004) は複合ポアソン過程を用いて両側のジャンプ (大量の引き出しと預け入れ) を考慮した資金管理モデルを定式化し、資金管理政策が4つの閾値からなることを仮定し、ジャンプの影響を考察している。Bensoussan et al. (2009), Benkherouf and Bensoussan (2009) は在庫問題に対して、一般的な在庫管理費用の下で複合ポアソン過程を用いて下側のジャンプ (大量需要) を考慮した場合に、最適政策が (s, S) 政策となることを示している。さらに、Yamazaki (2013) は需要過程を一般化し、下側のジャンプをもつレヴィ過程の下で最適政策を示している。

本研究では、突発的な大量資金需要が複合ポアソン過程により発生し、資金需要量 (ジャンプ幅) に両側指数分布を仮定する。このとき、4つの閾値による方針が最適であることを明らかにするとともに、大量需要が閾値に与える影響を数値的に示す。

2 資金管理モデルの定式化

確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ とする。時刻 0 から t までの累積需要 Z_t を

$$Z_t = \mu t + \sigma W_t + M_t \quad (2.1)$$

とする。ここで、 μ は平均変化率、 σ はボラティリティ、 W_t は標準ブラウン運動である。 M_t は複合ポアソン過程であり、突発的な大量需要を表す。 N_t を強度 $\lambda \geq 0$ のポアソン過程とし、 Y_i ,

$i = 1, 2, \dots$ を独立で同一な分布に従う確率変数の列とする. また, Y_i の確率密度関数を $m(\cdot)$ とする. Y_i とポアソン過程 N_t , 標準ブラウン運動 W_t はそれぞれ互いに独立であると仮定する. 複合ポアソン過程 M_t を次式で定義する.

$$M_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i. \quad (2.2)$$

確率変数 Y_i は次の確率密度関数をもつ両側指数分布に従うと仮定する.

$$m(y) = p_u \eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{\{y \geq 0\}} + p_d \eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{\{y < 0\}}. \quad (2.3)$$

ここで, 正のジャンプと負のジャンプが発生する確率をそれぞれ $p_u, p_d \geq 0$, $p_u + p_d = 1$ とし, $\eta_1, \eta_2 > 0$ とする. また, 確率変数 Y_1 の平均を $\mu_m \equiv E[Y_1] = p_u/\eta_1 - p_d/\eta_2$ とする.

$\mathcal{F}_t, t > 0$ を $\{W_s, M_s, 0 < s \leq t\}$ の生成する σ 代数とし, $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$ とする. 次に, 資金管理政策 v は停止時刻の列 τ_1, τ_2, \dots と各停止時刻に対応する確率変数の列 ξ_1, ξ_2, \dots からなり, 以下の条件を満たすものとする.

$$\begin{cases} 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \dots, \\ \tau_i \rightarrow \infty, \text{ a.s. as } i \rightarrow \infty, \\ \xi_i \in \mathcal{F}_{\tau_i}, \forall i \geq 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

ここで, τ_i と ξ_i はそれぞれ i 回目の資金取引時刻と資金取引量を表す. また, \mathcal{V} を資金管理政策の集合とする.

資金管理政策 $v = \{(\tau_i, \xi_i), i = 1, 2, \dots\}$ が適用されたとき, 時刻 t における資金量 X_t^v は次式となる.

$$\begin{cases} X_t^v = x - Z_t + \sum_{i=1}^{\infty} I_{\{\tau_i < t\}} \xi_i, \\ X_0^v = x. \end{cases} \quad (2.5)$$

ここで, X_t^v の第3項は時刻 t までに取引された総資金量を表している. 資金を ξ 単位取引する際に生じる取引費用関数を次式で定義する.

$$T(\xi_i) = \begin{cases} K_1 + k_1 \xi_i, & \xi_i \geq 0 \text{ のとき}, \\ K_2 - k_2 \xi_i, & \xi_i < 0 \text{ のとき}. \end{cases} \quad (2.6)$$

$K_1 > 0$ と $k_1 > 0$ はそれぞれ取引により資金量を増やすときに生じる固定費と変動費を表す. 同様に, $K_2 > 0$ と $k_2 > 0$ はそれぞれ資金量を減らすときに生じる固定費と変動費である. 取引がおこなわれていない間は資金の保有不足費用が発生し, その関数を次式で定義する.

$$C(x) = \begin{cases} hx, & x \geq 0 \text{ のとき}, \\ -px, & x < 0 \text{ のとき}. \end{cases} \quad (2.7)$$

ここで、 $h > 0$ と $p < 0$ はそれぞれ資金 1 単位当たりの保有費用と不足費用である。保有費用は手持ち資金を投資に回さないことによる機会損失費用などを表す。

資金量 x と資金管理政策 v が与えられたとき、無限期間における期待総費用は

$$J_x(v) = E_x^v \left[\int_0^\infty C(X_t^v) e^{-\alpha t} dt + \sum_{i=1}^\infty T(\xi_i) e^{-\alpha \tau_i} \mid X_0^v = x \right] \quad (2.8)$$

で与えられる。ただし、 $\alpha > 0$ を割引率とする。この期待総費用を最小とする最適な資金管理政策 v^* を求める。最小費用関数を

$$\phi(x) = \inf_{v \in \mathcal{V}} J_x(v) \quad (2.9)$$

とする。

本研究で定義した資金需要過程 (2.1)、取引費用関数 (2.6)、資金保有費用関数 (2.7) の下では、次の準変分不等式 (Quasi-Variational Inequality) を満たす関数が価値関数 (2.9) に等しいことが知られている (Davis et al. 2010)。

$$\mathcal{L}\phi(x) \leq C(x), \quad (2.10)$$

$$\phi(x) \leq \mathcal{M}\phi(x), \quad (2.11)$$

$$(\mathcal{L}\phi(x) - C(x))(\phi(x) - \mathcal{M}\phi(x)) = 0. \quad (2.12)$$

ここで、

$$(\mathcal{L}\phi)(x) = -\frac{1}{2}\sigma^2\phi''(x) + \mu\phi'(x) + \alpha\phi(x) - \lambda \int_{-\infty}^\infty (\phi(x-y) - \phi(x))m(y)dy, \quad (2.13)$$

$$(\mathcal{M}\phi)(x) = \inf_{\xi} \{T(\xi) + \phi(x+\xi)\}. \quad (2.14)$$

(2.10) 式は微小時間の間に取引が実施されない場合に、微小時間の前後の期待総費用を比較することにより得られる不等式である。(2.11) 式は取引の前後で期待総費用を比較することから得られる不等式である。(2.12) 式は任意の時刻において取引を実施するか否かのいずれかが選択されることを表している。

3 資金管理政策の導出

仮定 1 取引費用の変動費と資金の保有不足費用との関係を以下のように仮定する。

$$(i) \quad h - \alpha k_2 > 0$$

$$(ii) \quad p - \alpha k_1 > 0$$

仮定 1(i) は $\frac{h}{\alpha} > k_2$ と表すことができるため、資金 1 単位を現在から永久的に保持したときの現在割引費用よりも取引変動費用の方が小さいことを意味する。したがって、この不等式を満たさなければ取引は実施されない。同様に、仮定 1(ii) は資金 1 単位についての品切れ費用の現在割引費用と取引費用の関係を意味している。この場合も、不等式を満たさなければ、取引するよりも資金が品切れしている方が費用が小さいため、取引は実施されない。

定理 1 仮定 1 の下で以下が成り立つ.

(i) 継続領域 \mathcal{C} と実行領域 \mathcal{A} がそれぞれ

$$\mathcal{C} := \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) < \mathcal{M}\phi(x)\} = (d, u), \quad (3.1)$$

$$\mathcal{A} := \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = \mathcal{M}\phi(x)\} = (-\infty, d] \cup [u, +\infty) \quad (3.2)$$

となる定数 $-\infty < d < u < \infty$ が存在する.

(ii) (2.9) 式で定義された価値関数 $\phi(x)$ は次式を満たす.

$$\begin{cases} \mathcal{L}\phi(x) = C(x), & d < x < u \text{ のとき,} \\ \phi(x) = \phi(d) + k_1(d - x), & x \leq d \text{ のとき,} \\ \phi(x) = \phi(u) + k_2(x - u), & x \geq u \text{ のとき.} \end{cases} \quad (3.3)$$

(iii) 次式を満たす $D \in (d, +\infty)$ と $U \in (-\infty, u)$ が存在する.

$$\phi'(d) = \phi'(D) = -k_1, \quad (3.4)$$

$$\phi'(u) = \phi'(U) = k_2, \quad (3.5)$$

$$\phi(d) = \phi(D) + K_1 + k_1(D - d), \quad (3.6)$$

$$\phi(u) = \phi(U) + K_2 - k_2(U - u), \quad (3.7)$$

定理 1 は Guo and Wu (2009) と同様に, 以下のステップで証明される.

補題 1 資金量が $x_0 \in \mathcal{A}$ のとき, 取引後の期待総費用を最小とする取引量を

$$\xi_0 \in \Xi(x_0) := \{\xi \in \mathbb{R} : \mathcal{M}\phi(x_0) = \phi(x_0 + \xi) + T(\xi)\}, \quad (3.8)$$

とする. このとき, 取引の前後で資金量における価値関数 ϕ の傾きは等しい.

$$\phi'(x_0) = \phi'(x_0 + \xi_0) = \begin{cases} -k_1, & \xi_0 \geq 0 \text{ のとき,} \\ k_2, & \xi_0 < 0 \text{ のとき.} \end{cases} \quad (3.9)$$

補題 2 資金量 $x_0 \in \mathcal{A}$ と取引量 $\xi_0 \in \Xi(x_0)$ において,

$$(i) \ x_0 > 0 \text{ ならば } \xi_0 < 0, \ \phi'(x_0) = k_2,$$

$$(ii) \ x_0 < 0 \text{ ならば } \xi_0 > 0, \ \phi'(x_0) = -k_1.$$

補題 2 は取引をおこなう際に, 資金量が正ならば資金レベルを下げる. また, 資金量が負ならば取引により資金レベルを上げることを意味する.

補題 3 積分方程式 $\mathcal{L}\phi = C$ の一般解は

$$\phi(x) = \begin{cases} A_1 e^{\beta_1 x} + A_2 e^{\beta_2 x} - \frac{p}{\alpha} x + \frac{p}{\alpha^2} (\mu + \lambda \mu_m), & x \leq 0 \text{ のとき}, \\ A_3 e^{\beta_3 x} + A_4 e^{\beta_4 x} + \frac{h}{\alpha} x - \frac{h}{\alpha^2} (\mu + \lambda \mu_m), & 0 \leq x \text{ のとき}. \end{cases} \quad (3.10)$$

ここで、定数 β_i , $i = 1, 2, 3, 4$ は方程式 $G(\theta) = \alpha$ の解である。ただし、

$$G(\theta) = -\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \lambda \left(\frac{p_u\eta_1}{\eta_1 + \theta} + \frac{p_d\eta_2}{\eta_2 - \theta} - 1 \right). \quad (3.11)$$

また、定数 β_i , $i = 1, 2, 3, 4$ の大小関係は

$$-\infty < \beta_4 < -\eta_1 < \beta_3 < 0 < \beta_2 < \eta_2 < \beta_1 < \infty. \quad (3.12)$$

さらに、定数 A_j , $j = 1, \dots, 4$ は次の連立一次方程式の解である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \beta_1 & \beta_2 & -\beta_3 & -\beta_4 \\ \frac{1}{\eta_1 + \beta_1} & \frac{1}{\eta_1 + \beta_2} & -\frac{1}{\eta_1 + \beta_3} & -\frac{1}{\eta_1 + \beta_4} \\ \frac{1}{\eta_2 - \beta_1} & \frac{1}{\eta_2 - \beta_2} & -\frac{1}{\eta_2 - \beta_3} & -\frac{1}{\eta_2 - \beta_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2}(h+p)(\mu + \lambda\mu_m), \\ \frac{1}{\alpha}(h+p), \\ -\frac{1}{\eta_1^2\alpha^2}(h+p)(\alpha + \eta_1(\mu + \lambda\mu_m)) \\ \frac{1}{\eta_2^2\alpha^2}(h+p)(\alpha - \eta_2(\mu + \lambda\mu_m)) \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

補題 4 仮定 1 が成り立つとき、継続領域 \mathcal{C} は区間 $(-\infty, d)$ と $(u, +\infty)$ を含まない。ただし、 $d \leq +\infty$, $-\infty \leq u$.

補題 5 継続領域 \mathcal{C} は連結している。

定理 1 の証明.

- (i) 補助定理 4 と補助定理 5 より、継続領域 \mathcal{C} は連結しているため $\mathcal{C} = (d, u)$ であり、実行領域は $\mathcal{A} = (-\infty, d] \cup [u, +\infty)$ となる。
- (ii) 資金量が $x \geq u$ のとき、取引が実行され、その取引量を $\xi \in \Xi(x)$ とする。取引後の資金量は $x + \xi \in \mathcal{C}$ であることから、取引量 ξ は負である。したがって、補助定理 1 より、 $\phi'(x) = -k_1$ の両辺を積分して $\phi(x) = \phi(u) + k_2(x - u)$ を得る。同様に、 $x \leq d$ のとき、 $\phi(x) = \phi(d) + k_1(d - x)$ となる。
- (iii) 資金量 $x = u$ のとき、取引量を $\xi \in \Xi(u)$ とする。また、取引後の資金量は $U = u + \xi \in \mathcal{C} = (d, u)$ 。したがって、補助定理 1 より、 $\phi'(u) = \phi'(U) = k_2$ を得る。さらに、(2.12) 式より、 $\phi(u) = \mathcal{M}\phi(u) = \phi(U) + K_2 - k_2(U - u)$ となる。

命題 1 (3.3) 式を満たす関数 $\phi(x)$ は

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi(d) + k_1(d - x), & x \leq d \text{ のとき}, \\ (A_1 + A_5)e^{\beta_1 x} + (A_2 + A_6)e^{\beta_2 x} + A_7 e^{\beta_3 x} + A_8 e^{\beta_4 x} \\ - \frac{p}{\alpha} x + \frac{p}{\alpha^2} (\mu + \lambda \mu_m), & \min\{d, 0\} \leq x \leq 0 \text{ のとき}, \\ (A_3 + A_7)e^{\beta_3 x} + (A_4 + A_8)e^{\beta_4 x} + A_5 e^{\beta_1 x} + A_6 e^{\beta_2 x} \\ + \frac{h}{\alpha} x - \frac{h}{\alpha^2} (\mu + \lambda \mu_m), & 0 \leq x \leq u \text{ のとき}, \\ \phi(u) + k_2(x - u), & u \leq x \text{ のとき}. \end{cases} \quad (3.14)$$

ここで、定数 A_i , $i = 1, \dots, 4$ は (3.13) 式の解である。さらに、閾値 d , D , U , u と定数 A_i , $i = 5, \dots, 8$ は (3.4) 式, (3.5) 式と

$$\begin{pmatrix} \frac{e^{\beta_1 d}}{\eta_1 + \beta_1} & \frac{e^{\beta_2 d}}{\eta_1 + \beta_2} & \frac{e^{\beta_3 d}}{\eta_1 + \beta_3} & \frac{e^{\beta_4 d}}{\eta_1 + \beta_4} \\ e^{\beta_1 d} & e^{\beta_2 d} & e^{\beta_3 d} & e^{\beta_4 d} \\ e^{\beta_1 u} & e^{\beta_2 u} & e^{\beta_3 u} & e^{\beta_4 u} \\ \frac{e^{\beta_1 u}}{\eta_2 - \beta_1} & \frac{e^{\beta_2 u}}{\eta_2 - \beta_2} & \frac{e^{\beta_3 u}}{\eta_2 - \beta_3} & \frac{e^{\beta_4 u}}{\eta_2 - \beta_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{A_1}{\eta_1 + \beta_1} e^{\beta_1 d} - \frac{A_2}{\eta_2 + \beta_2} e^{\beta_2 d} + \frac{1}{\eta_1} \chi_1(d, D) \\ -\phi_1(d) + \phi(D) + K_1 + k_1(D - d) \\ -\phi_2(u) + \phi(U) + K_2 + k_2(u - U) \\ -\frac{A_3}{\eta_2 - \beta_3} e^{\beta_3 u} - \frac{A_4}{\eta_2 - \beta_4} e^{\beta_4 u} + \frac{1}{\eta_2} \chi_2(u, U) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

の解である。ただし、

$$\chi_1(d, D) = \phi(D) + K_1 + k_1 \left(D - d + \frac{1}{\eta_1} \right) + \frac{p}{\alpha} \left(d - \frac{1}{\eta_1} \right) - \frac{p}{\alpha^2} (\mu + \lambda \mu_m), \quad (3.16)$$

$$\chi_2(u, U) = \phi(U) + K_2 + k_2 \left(u - U + \frac{1}{\eta_2} \right) - \frac{h}{\alpha} \left(u + \frac{1}{\eta_2} \right) + \frac{h}{\alpha^2} (\mu + \lambda \mu_m). \quad (3.17)$$

4 数値計算

本節では、資金量を上方に調節する場合（取引量が正）に限定して数値計算をおこなう。ジャンプに関するパラメータが閾値に与える影響を考察する。補題 1 において、 $u \rightarrow \infty$, $A_5 = A_6 = 0$ のとき、資金管理政策は (d, D) となる。

表 1 の値を用いて数値計算をおこなう。図 1 にジャンプに関するパラメータと閾値との関係を示す。図 1 (左上) が示すように、ジャンプの平均的な発生回数 λ は閾値にほとんど影響を与えないことがわかる。これは表 1 において、正のジャンプと負のジャンプの発生確率およびジャンプ幅のパラメータを等しく設定しているためである。図 1 (右上) は正のジャンプ発生確率と閾値の関係を示している。大量需要が起きやすくなるほど、資金不足となる可能性が高まる。そのため、閾値 d と D を高く設定し、早い時期に資金調整をおこなう、資金レベルを高い水準に保つことで資金不足に備えていることがわかる。図 1 の左下と右下の図はそれぞれ正のジャンプ幅と負のジャンプ幅のパラメータを変化させたときの閾値を表している。ジャンプ幅は両側指数分布に従うため、正のジャンプ幅および負のジャンプ幅の平均はそれぞれ $1/\eta_1$ と $1/\eta_2$ である。したがって、 η_1 が小さいほど、正のジャンプが発生したときの資金需要が平均的に大きくなり、資金不足

となる可能性が高まる。そのため、資金調節後の資金レベル D を高くし、保有する資金量を増やしている。また、 η_2 が小さいほど、負のジャンプが起きたときに預け入れられる資金量が平均的に大きくなるため、資金余剰となる。したがって、この場合には閾値を低く設定し、資金レベルを低く維持する。

図2は左上は資金需要過程のボラティリティと閾値との関係を示しており、資金需要の不確実性が高まるほど、閾値 d を低くし、取引回数を減らすことで、取引費用を減らしていることがわかる。図2の右上より、資金不足費用が大きい場合には、閾値 d を高く設定することで資金不足量を減らしている。また、図2の右下と左下の図はそれぞれ取引費用の変動費と固定費に関する分析結果である。変動費と比較して、固定費の変化は閾値に大きく影響することがわかる。固定費が高くなるほど、閾値 d は減少し、閾値 D は増加する。これより、固定費が高いほど、取引回数が減少するとともに1回の取引量が増加することがわかる。

5 おわりに

本研究では、資金管理問題において突発的な大量需要をジャンプ過程を用いて定式化をおこない、ジャンプ幅が両側指数分布にしたがう場合に資金管理政策が4つの閾値からなることを示した。資金調節を上側に限定した場合について、数値計算をおこない各パラメータが閾値に与える影響を考察した。その結果、ジャンプの発生確率、ボラティリティ、固定取引費用が閾値に大きく影響することを確認した。

今後の研究では、両側調節の場合についての数値計算や閾値に関する定性的な性質を明らかにすることを目標とする。また、本研究では在庫費用関数に線形関数を仮定したが、この関数を一般化し、より現実的な問題に応用したい。

参考文献

- [1] Baccarin, S. (2002). Optimal impulse control for cash management with quadratic holding-penalty costs. *Decisions in Economics and Finance* **25**: 19-32.

表 1: 数値計算で用いるパラメータ

平均変化率 (μ)	0.1	取引費用 ($k = k_1 = k_2$)	0.2
ボラティリティ (σ)	0.3	取引費用 ($K = K_1 = K_2$)	0.8
割引率 (α)	0.01	ジャンプ強度 (λ)	0.3
保管費用 (h)	0.1	ジャンプ幅のパラメータ ($\eta_1 = \eta_2$)	100
不足費用 (p)	0.4	ジャンプ発生確率 ($p_u = p_d$)	0.5

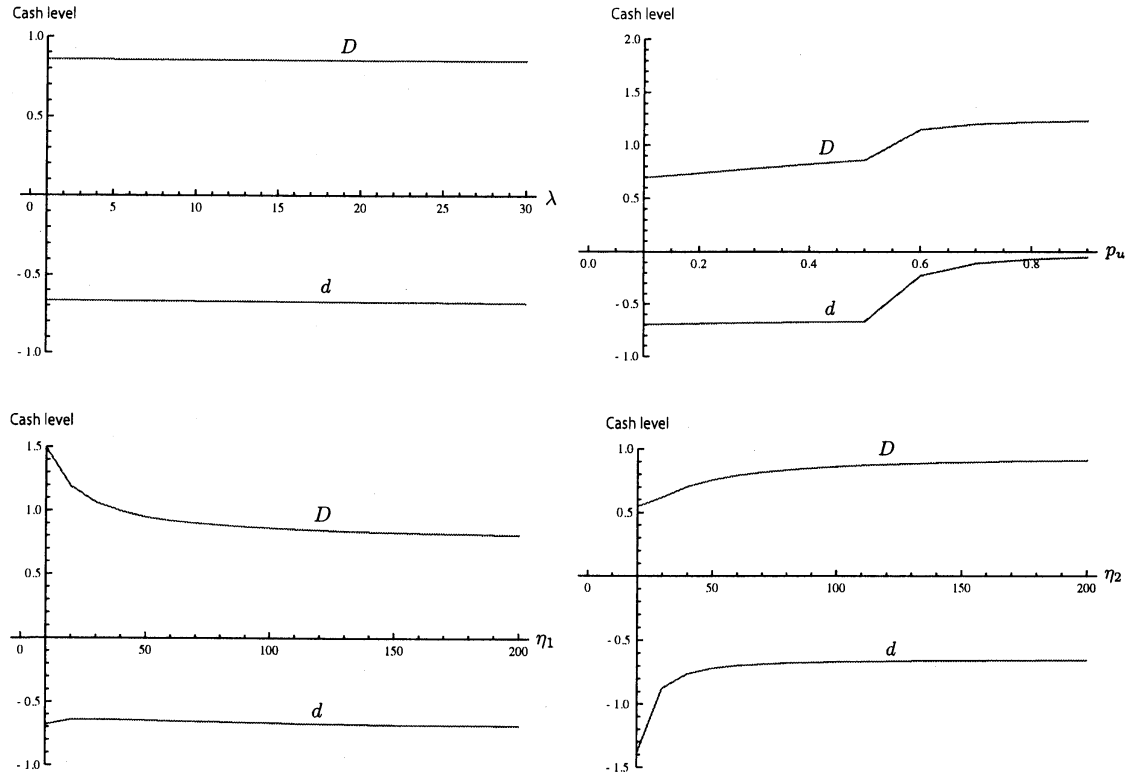


図 1: ジャンプに関するパラメータと閾値の関係

- [2] Baccarin, S. (2009). Optimal impulse control for a multidimensional cash management system with generalized cost functions. *European Journal of Operational Research* **196**: 198-206.
- [3] Bar-Ilan, A., Perry, D. and Stadje, W. (2004). A generalized impulse control model of cash management. *Journal of Economic Dynamics & Control* **28**: 1013-1033.
- [4] Benkherouf, L. and Bensoussan, A. (2009). Optimality of an (s, S) policy with compound Poisson and diffusion demands: A quasi-variational inequalities approach. *SIAM Journal on Control and Optimization* **48**: 756-762.
- [5] Bensoussan, A., Liu, R. H. and Sethi, S. P. (2006). Optimality of an (s, S) policy with compound Poisson and diffusion demand: A QVI Approach. *SIAM Journal on Control and Optimization* **44**: 1650-1676.
- [6] Constantinides, G. and Richards, S. (1978). Existence of optimal simple policies for discounted cost inventory and cash management in continuous time. *Operations Research* **26**: 620-636.
- [7] Davis, M., Gin, X. and Wu, G. (2010). Impulse control of multidimensional jump diffusions (2010). *SIAM Journal on Control and Optimization* **48**: 5276-5293.

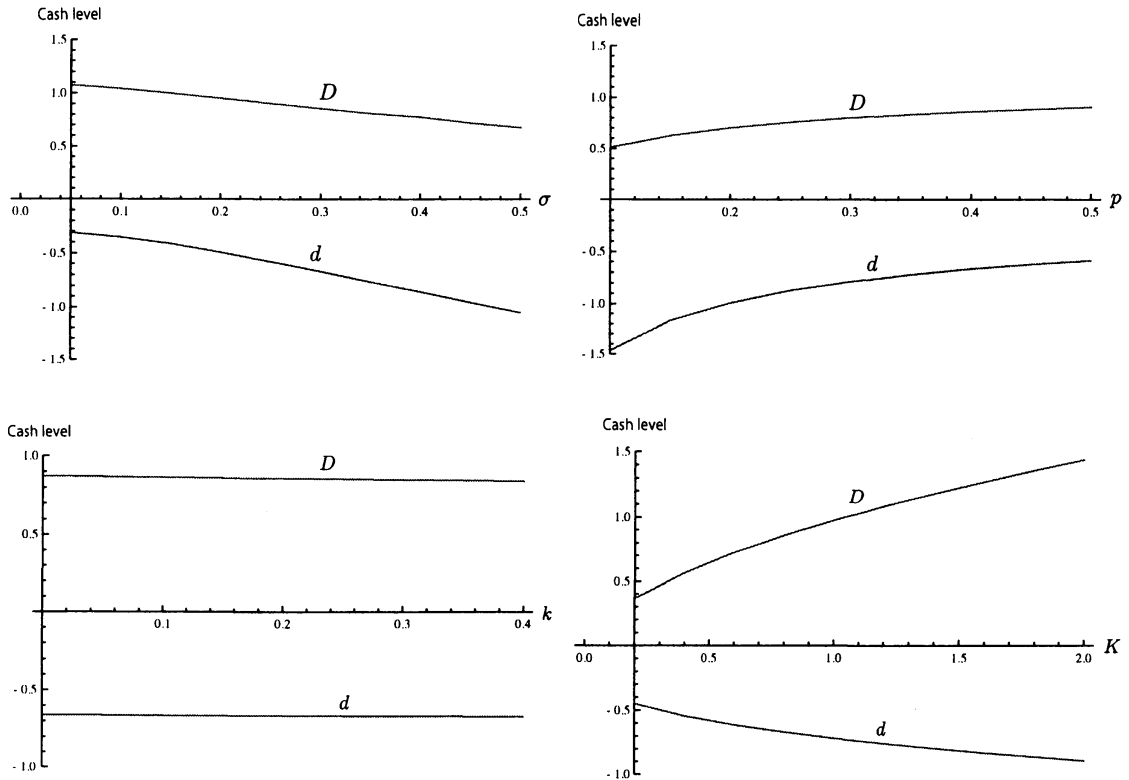


図 2: ボラティリティと費用パラメータの変化と閾値との関係

- [8] Guo X and Wu G (2009). Smooth fit principle for impulse control of multidimensional diffusion processes. *SIAM Journal on Control and Optimization* **48**: 594-617.
- [9] Miller, M. and Orr, D. (1966). A model of the demand for money by firms. *The Quarterly Journal of Economics* **81**: 413-435.
- [10] Yamazaki, K. (2013). Inventory control for spectrally positive Lévy demand processes, *arXiv*: 1303.5163.

Graduate School of Finance, Accounting and Law, Waseda University
 1-4-1, Nihombashi, Chuo-ku, Tokyo, 103-0027, Japan
 E-mail address: k-sato@aoni.waseda.jp

早稲田大学大学院ファイナンス研究科 佐藤 公俊

Faculty of Urban Science, Meijo University
 4-3-3, Nijigaoka, Kani, Gifu, 509-0261, Japan
 E-mail address: atsuo@urban.meijo-u.ac.jp

名城大学都市情報学部 鈴木 淳生